Méthode de Laplace

Théorème 1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in]a,+\infty]$. Soient $\varphi \in \mathcal{C}^2([a,b[,\mathbb{R})$ et $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe t_0 tel que $e^{-t_0\varphi} f$ soit intégrable sur $[a,b[$. On suppose que f est continue en a, que $f(a) \neq 0$, que $\varphi'(a) = 0$, que $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$ et finalement, que $\varphi''(a) > 0$.*
Alors on a l'asymptotique,

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)\, dx \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t\varphi(a)} f(a) \sqrt{\frac{\pi}{2t\varphi''(a)}}.$$

Démonstration. *On commence par prouver que l'intégrale est bien définie, à partir de t_0. Soient $t \geq t_0$ et $x \in [a,b[$ alors,*

$$\left|e^{-t\varphi(x)} f(x)\right| = e^{-(t-t_0)\varphi(x)} e^{-t_0\varphi(x)} |f(x)| \leq e^{-(t-t_0)\varphi(a)} e^{-t_0\varphi(x)} |f(x)|,$$

où la majoration s'obtient par croissance de φ. Par hypothèse, cette majoration est intégrable sur $[a,b[$, ce qui conclut ce premier point.

Traitons le cas particulier $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$. Par continuité de f en 0, on dispose de $M > 0$ et $c \in [0,b[$ tels que pour tout $x \in [0,c]$, $|f(x)| \leq M$. Ainsi pour $t \geq t_0$,

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x)dx = \int_0^c e^{-tx^2} f(x)dx + \int_c^b e^{-tx^2} f(x)dx.$$

D'une part par convergence dominée,

$$\int_0^c e^{-tx^2} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{c\sqrt{t}} e^{-u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) du \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{t}}.$$

D'une autre, par hypothèse de convergence et par croissances comparées,

$$\left|\int_c^b e^{-tx^2} f(x)dx\right| \leq e^{-(t-t_0)a^2} \int_c^b e^{-t_0x^2} |f(x)|dx = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Donc on a ce qu'on voulait, dans ce cas particulier :

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi} f(0)}{2\sqrt{t}}.$$

Pour le cas général, définissons, $\psi : x \in [a,b[\longmapsto \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$.
Alors ψ est au moins dérivable sur $]a,b[$, de plus, pour tout $x \in]a,b[$,

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} > 0.$$

Aussi,

$$\psi'(x) = \frac{\varphi''(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)}{\sqrt{2\varphi''(a)(x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}((x-a)^2)}} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}}.$$

Donc ψ est dérivable en a et $\psi'(a) = \sqrt{\dfrac{\varphi''(a)}{2}} > 0$.

De plus ψ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a,b[$ sur un intervalle de la forme $[0,b'[$, de réciproque $y \longmapsto \varphi^{-1}(y^2 + \varphi(a))$. Après changement de variable,

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)dx &= \int_0^{b'} e^{-t(y^2+\varphi(a))} f\left(\psi^{-1}(y)\right) \left(\psi^{-1}\right)'(y)dy.\\ &= e^{-t\varphi(a)} \int_0^{b'} e^{-ty^2} g(y)dy,\end{aligned}$$

où $g(y) = f\left(\psi^{-1}(y)\right) \left(\psi^{-1}\right)'(y)$.
On s'est ramené au cas précédent, montrons que g est continue en 0.
Par continuité de φ^{-1}, $\psi^{-1}(y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} a$. Aussi,

$$(\psi^{-1})'(0) = \frac{1}{\psi'\left(\psi^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{\psi'(a)} = \sqrt{\frac{2}{\varphi''(a)}}.$$

Donc g se prolonge par continuité en 0 avec $g(0) = f(a)\sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(a)}}$.

D'après le cas particulier,

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x)dx \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t\varphi(a)} f(a)\sqrt{\frac{\pi}{2t\varphi''(a)}}.$$

Théorème 2. *On a l'asymptotique,*

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\; t^t e^{-t}.$$

Démonstration. *Par définition, pour $t > -1$,*

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t e^{-x} dx = \underset{x=t(u+1)}{=} t^{t+1} \int_{-1}^{+\infty} (u+1)^t e^{-t(u+1)} du.$$

Notons $\varphi(u) = u + 1 - \ln(u+1)$. Alors,

$$\Gamma(t+1) = t^{t+1}\left(\int_{-1}^{0} e^{-t\varphi(u)} du + \int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(u)} du\right).$$

Pour la seconde intégrale, on remarque que φ vérifie toutes les hypothèses du théorème précédent sur $[0, +\infty[$ et que $f = 1$ convient. Alors,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\varphi(u)} du \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}\sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

Pour la première intégrale, on effectue d'abord un changement de variable,

$$\int_{-1}^{0} e^{-t\varphi(u)} du = \int_0^1 e^{-t\varphi(-u)} du.$$

On remarque que $\varphi(-\cdot)$ vérifie les hypothèses du théorème sur $[0, 1[$ et alors,

$$\int_0^1 e^{-t\varphi(-u)} du \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-t}\sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

Finalement,

$$\Gamma(t+1) \underset{t\to+\infty}{\sim} 2t^{t+1} e^{-t}\sqrt{\frac{\pi}{2t}} = \sqrt{2\pi t}\; t^t e^{-t}.$$

Remarques, références.

Je suis passé sur ce développement pour mon oral d'analyse, je n'ai présenté que le premier théorème. Il y a des petits détails qu'il faudrait rajouter pour améliorer ce que j'ai écrit, mais le principal est rédigé. On peut par exemple rédiger le théorème de convergence dominée, bien expliquer le théorèmes d'analyse réelle que l'on utilise.. La référence pour ces deux théorèmes est le Rouvière.
Il faut savoir expliquer pourquoi le fait que ψ' admette une limite en a implique que ψ est dérivable en a et que la valeur de sa dérivée en a est la limite (c'est une question qui m'a été posée). Je pense qu'il faut aussi bien connaître ses formules de Taylor (surtout la plus chiante, avec reste intégral), on peut être interrogé dessus.